

Hydrostatik.nb

Fragesteller: 15. 9.2009 Norbert Südland

Bearbeitung: 16. 9.2009 – 19. 9.2009 Norbert Südland

Letzte Berechnung: 30. 9.2009 Norbert Südland

Letzte Korrektur: 30. 9.2009 Norbert Südland

■ 1.1. Frage

Welcher Druck herrscht im Innern eines Sternes?

■ 1.2. Vorbereitung

Die deutsche Übersetzung der *Mathematica*-Befehle wird geladen:

<< Deutsch`

Mit den übersetzten Befehlen kann nun eine deutsche Einheiten-Kontrolle formuliert werden:

$$\begin{aligned} \text{EinheitenKontrolle} = \{ & \text{Regel} \rightarrow \text{Gleichung}, p'[_] \rightarrow \frac{\text{"N"}}{\text{"m"}^3}, g[_] \rightarrow \frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2}, p[_] \rightarrow \frac{\text{"N}}{\text{"m"}^2}, \\ & \rho[_] \rightarrow \frac{\text{"kg}}{\text{"m"}^3}, g \rightarrow \frac{\text{"m}}{\text{"s"}^2}, \gamma \rightarrow \frac{\text{"m"}^3}{\text{"kg"} \text{"s"}^2}, \rho \rightarrow \frac{\text{"kg}}{\text{"m"}^3}, h \rightarrow \text{"m"}, H \rightarrow \text{"m"}, \\ & R \rightarrow \frac{\text{"J}}{\text{"K"} \text{"mol"}}, T \rightarrow \text{"K"}, M \rightarrow \frac{\text{"kg}}{\text{"mol"}}, p \rightarrow \frac{\text{"N}}{\text{"m"}^2}, a \rightarrow \frac{\text{"N"} \text{"m"}^6}{\text{"m"}^2}, b \rightarrow \text{"m"}^3, \\ & V \rightarrow \text{"m"}^3, \text{"N"} \rightarrow \frac{\text{"kg"} \text{"m}}{\text{"s"}^2}, \text{"J"} \rightarrow \text{"N"} \text{"m"}, _? \text{ObNumerisch} \text{Übrig} \rightarrow \text{Übrig} \} \\ \{ \text{Rule} \rightarrow \text{Equal}, p'[_] \rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^3}, g[_] \rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, p[_] \rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \rho[_] \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, g \rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \\ \gamma \rightarrow \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \rho \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, h \rightarrow \text{m}, H \rightarrow \text{m}, R \rightarrow \frac{\text{J}}{\text{K mol}}, T \rightarrow \text{K}, M \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{mol}}, p \rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \\ a \rightarrow \text{m}^4 \text{N}, b \rightarrow \text{m}^3, V \rightarrow \text{m}^3, \text{N} \rightarrow \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, \text{J} \rightarrow \text{m N}, \text{Übrig}_? \text{ObNumerisch} \rightarrow \text{Übrig} \} \end{aligned}$$

Das Umstellen der Vorgabe-Schrift für Zeichnungen aller Art geschieht wie folgt

`$DefaultFont = {"Times", 12.}`

`$VorgabeSchrift`

`{Times, 12.}`

`{Times, 12.}`

■ 1.3. Antwort

■ 1.3.1. Hydrostatischer Druck

■ 1.3.1.1. Lehrbuch-Formel

Laut dtv-Lexikon der Physik ([dtv1969], Band 4, Stichwort *Hydrostatik*, Seite 160-162) gilt für nicht allzu große Höhenunterschiede h bei konstanter Fallbeschleunigung g :

$$p_2 - p_1 = \rho g h \quad (1.1)$$

■ 1.3.1.2. Druck-Gradient

Für $\rho \rightarrow \rho[h]$ und $g \rightarrow g[h]$ ergibt sich zunächst die Notwendigkeit, einen Druck-Gradienten zu bestimmen:

$$\nabla p = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{p[h + \Delta h] - p[h]}{\Delta h} = \partial_h p[h] = \rho[h] g[h] \quad (1.2)$$

■ 1.3.1.3. Allgemeiner hydrostatischer Druck

Der allgemeine hydrostatische Druck ergibt sich nun als Integral über diesen Druck-Gradienten:

$$p[h] = \int \partial_h p[h] dh = \int \rho[h] g[h] dh \quad (1.3)$$

■ 1.3.2. Inkompressible Flüssigkeit

■ 1.3.2.1. Konstante Dichte

Bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ist $\rho[h] \rightarrow \rho$ eine Konstante, etwa bei einer Erde, die nur aus Wasser bestünde.

■ 1.3.2.2. Fallbeschleunigung unter Wasser

Dann ergibt sich die Fallbeschleunigung unter Wasser jeweils als die Fallbeschleunigung, die die noch verbleibende Innenkugel nach dem Newtonschen Gravitations-Gesetz erzeugen würde (vgl. [BeS1945], § 31, Seite 111-112: Dort stimmt die Herleitung nicht völlig; vgl. auch [Krau2007], Graphik 9, Seite 27 und Kapitel 4, Seite 32-50), also:

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{\gamma 4 \pi}{h^2} \int_0^h h^2 \rho dh\}$$

% // Einheitenkontrolle // Deutsch

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{4}{3} h \pi \gamma \rho\}$$

{Richtig}

Die Fallbeschleunigung nimmt also kontinuierlich zum Mittelpunkt des Flüssigkeits-Sterns hin linear ab.

■ 1.3.2.3. Hydrostatischer Druck

Daraus folgt nun der hydrostatische Druck als Integral über $\rho g[h]$:

$$\{p[h] \rightarrow \int_H^h \rho g[h] dh /. \{g[h] \rightarrow -\frac{4}{3} h \pi \gamma \rho\}\}$$

% // Einheitenkontrolle // Deutsch

$$\{p[h] \rightarrow \rho \left(-\frac{2}{3} h^2 \pi \gamma \rho + \frac{2}{3} H^2 \pi \gamma \rho \right)\}$$

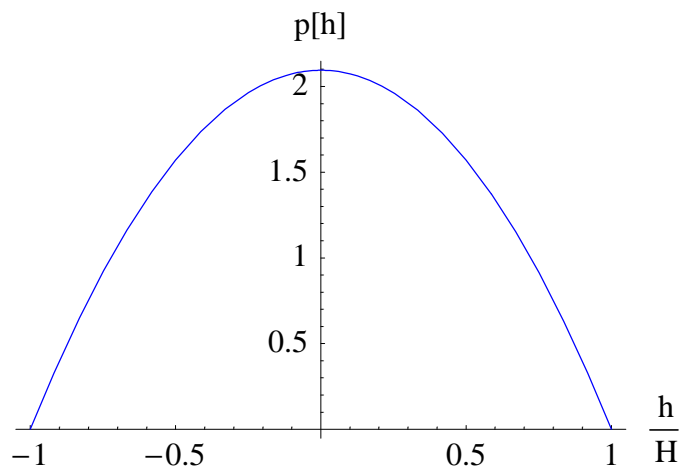
{Richtig}

■ 1.3.2.4. Schaubild $p[h]$ über h

Dies ergibt folgendes Schaubild:

Zeichnen @@ {Auswerten[$\rho \left(-\frac{2}{3} h^2 \pi \gamma \rho + \frac{2}{3} \pi H^2 \gamma \rho \right)$] /. { $\gamma \rightarrow 1, \rho \rightarrow 1, H \rightarrow 1$ }],

{ $h, -1, 1$ }, AchsenBeschriftung → {" $\frac{h}{H}$ ", "p[h]"}, ZeichenStil → SpektralFarbe[$\frac{2}{3}$];



■ 1.3.2.5. Maximal-Druck im Zentrum

Der Maximal-Druck im Zentrum beträgt:

$$\rho \left(-\frac{2}{3} h^2 \pi \gamma \rho + \frac{2}{3} \pi H^2 \gamma \rho \right) /. \{h \rightarrow 0\}$$

$$\frac{2}{3} H^2 \pi \gamma \rho^2$$

Der Maximal-Druck im Zentrum ist also bestimmbar.

■ 1.3.2.6. Schaubild h über $p[h]$

Die Darstellung der Umkehr-Funktion ist ebenfalls sinnvoll:

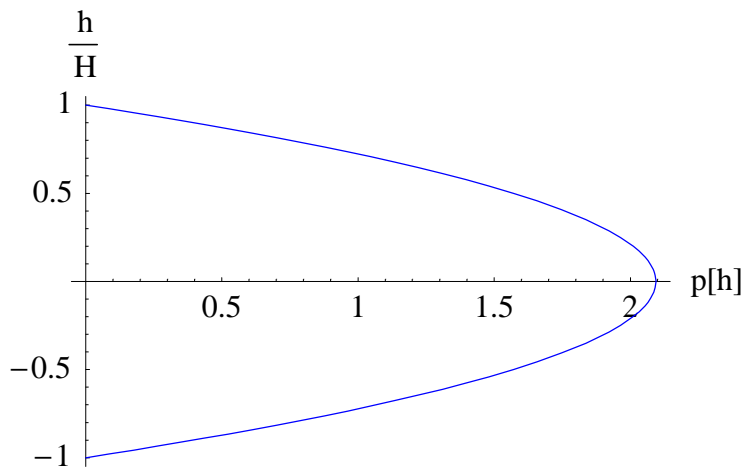
$$h /. \text{AuflösenNach}[p == \rho \left(-\frac{2}{3} h^2 \pi \gamma \rho + \frac{2}{3} \pi H^2 \gamma \rho \right), h] // \text{Vereinfachen}$$

Zeichnen @@

$$\{\text{Auswerten}[\% /. \{H \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1, \rho \rightarrow 1\}], \{p, 0, \frac{2}{3} \pi H^2 \gamma \rho^2 /. \{H \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1, \rho \rightarrow 1\}\},$$

$$\text{AchsenBeschriftung} \rightarrow \{ "p[h]", " \frac{h}{H} " \}, \text{ZeichnenStil} \rightarrow \text{SpektralFarbe}[\frac{2}{3}];$$

$$\left\{ -\sqrt{H^2 - \frac{3p}{2\pi\gamma\rho^2}}, \sqrt{H^2 - \frac{3p}{2\pi\gamma\rho^2}} \right\}$$



■ 1.3.2.7. Näherung für geringe Tiefe

Für eine nicht allzu große Tiefe Δh ergibt sich folgende Näherung:

$$\rho \left(-\frac{2}{3} h^2 \pi \gamma \rho + \frac{2}{3} \pi H^2 \gamma \rho \right) /. \{h \rightarrow H - \Delta h\} // \text{Ausmultiplizieren}$$

ReihenEntwicklung[%, {Δh, 0, 1}] // Normalisieren

$$\frac{\% g}{\frac{4}{3} H \pi \gamma \rho}$$

$$\frac{4}{3} H \pi \gamma \Delta h \rho^2 - \frac{2}{3} \pi \gamma \Delta h^2 \rho^2$$

$$\frac{4}{3} H \pi \gamma \Delta h \rho^2$$

$$g \Delta h \rho$$

Dies ist die Lehrbuch-Formel zum hydrostatischen Druck in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Das Vorzeichen von g wurde hierbei positiv gewählt, da der Druck mit der Tiefe Δh zunimmt.

■ 1.3.3. Kompressibles Gas

■ 1.3.3.1. Ideales Gas-Gesetz

Hier ist die Dichte nicht konstant, sondern ihrerseits eine Funktion des Druckes, im einfachsten Fall gemäß dem idealen Gas-Gesetz:

$$p V == n R T /. \{n \rightarrow \frac{m}{M}\} /. \{m \rightarrow \rho V\}$$

AuflösenNach[%, ρ] // Einebnen

% // EinheitenKontrolle // Deutsch

$$p V == \frac{R T V \rho}{M}$$

$$\{\rho \rightarrow \frac{M p}{R T}\}$$

{Richtig}

■ 1.3.3.2. Fallbeschleunigung im Gas

Die Fallbeschleunigung im Gas ergibt wieder jeweils die Fallbeschleunigung $g[h]$, die die noch verbleibende Innenkugel nach dem Newtonschen Gravitations-Gesetz an der Stelle h erzeugen würde, also:

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{\gamma 4 \pi}{h^2} \int_0^h \rho[h] h^2 dh\}$$

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{4 \pi \gamma \int_0^h h^2 \rho[h] dh}{h^2}\}$$

Die Fallbeschleunigung nimmt also kontinuierlich zum Mittelpunkt des Gas-Sterns hin nichtlinear ab.

■ 1.3.3.3. Nichtlineare Differenzial-Gleichung

Dies ergibt nun folgenden Zusammenhang:

$$\text{DruckGleichung}[p] = \partial_h p[h] == \rho[h] g[h] /. \{g[h] \rightarrow -\frac{\gamma 4 \pi}{h^2} \int_0^h \rho[h] h^2 dh\} /. \{\rho[h] \rightarrow \frac{M p[h]}{R T}\}$$

$$p'[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma \left(\int_0^h h^2 p[h] dh\right) p[h]}{h^2 R^2 T^2}$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differenzial-Gleichung, die nach Trennung des Integrals durch Differenzieren in eine reine Differenzial-Gleichung überführt werden kann:

$$\frac{h^2 \#}{p[h]} \& /@ \text{DruckGleichung}[p]$$

$$\partial_h \# \& /@ \%$$

$$\text{DruckGleichung}[p, 1] = \frac{\# p[h]}{h} \& /@ \% // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\frac{h^2 p'[h]}{p[h]} == -\frac{4 M^2 \pi \gamma \int_0^h h^2 p[h] dh}{R^2 T^2}$$

$$\frac{2 h p'[h]}{p[h]} - \frac{h^2 p'[h]^2}{p[h]^2} + \frac{h^2 p''[h]}{p[h]} == -\frac{4 h^2 M^2 \pi \gamma p[h]}{R^2 T^2}$$

$$2 p'[h] - \frac{h p'[h]^2}{p[h]} + h p''[h] == -\frac{4 h M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2}$$

Dies ist eine nichtlineare Differenzial-Gleichung 2. Ordnung in $p[h]$, die nicht so einfach analytisch gelöst werden kann.

■ 1.3.3.4. Triviale Lösung

Die Lösung $p[h] \equiv 0$ erfüllt die Gleichung:

$$p[h] \# \& /@ \text{DruckGleichung}[p, 1] // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\% /. \{p \rightarrow \text{Funktion}[\{h\}, 0]\} // \text{Deutsch}$$

$$2 p[h] p'[h] - h p'[h]^2 + h p[h] p''[h] == -\frac{4 h M^2 \pi \gamma p[h]^3}{R^2 T^2}$$

Richtig

Das Vakuum besitzt also die hydrostatisch stabile Lösung $p[h] = 0$ für alle h . Dies gilt freilich nur für die Bereiche, in denen kein Stern zu finden ist.

■ 1.3.3.5. Wesentliche Eigenschaft

Die gewonnene Gleichung ergibt mit $h \rightarrow 0$:

DruckGleichung[p, 1]

% /. {h → 0}

$$2 p'[h] - \frac{h p'[h]^2}{p[h]} + h p''[h] == -\frac{4 h M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2}$$

$$2 p'[0] == 0$$

Also resultiert $p'[0] \rightarrow 0$. Somit bleibt nur noch ein frei wählbares Anfangswertproblem, z.B. $p[0] \rightarrow 1$. Abweichungen von $p'[0] \rightarrow 0$ müssen auf Singularitäten in $p[h]$ führen.

Diese Eigenschaft $p'[0] \rightarrow 0$ resultiert aus der Tatsache, dass eine radiale Symmetrie für den Stern angesetzt wurde und dass im Symmetriezentrum die Resultierende der Gravitationskraft Null ist, also kein weiterer Druckzuwachs erfolgt. Der Ausflug in die Singularitäten für $p'[0] \neq 0$ kann somit entfallen.

■ 1.3.3.6. Numerische Lösungen und Schaubilder $p[h]$ über h

Die numerische Lösung dieser Differenzial-Gleichung gelingt gut, wenn für beide Anfangswert-Probleme an derselben Stelle $h \approx 0$ begonnen wird:

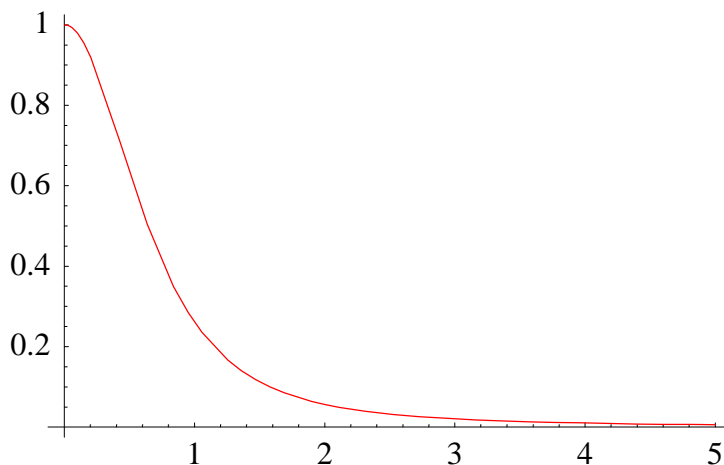
AuflösenNach[DruckGleichung[p, 1], p''[h]] /. {Regel → Gleichung} // Einebnen // Vereinfachen
Kurve[Rechts, 1] = DifferenzialGleichungNumerischLösen[

$$\{\%[1] /. \{M \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1, R \rightarrow 1, T \rightarrow 1\}, p\left[\frac{1}{1000}\right] == 1, p'\left[\frac{1}{1000}\right] == 0\}, p[h], \{h, \frac{1}{1000}, 5\};$$

Schaubild[Rechts, 1] = Zeichnen @@ {Auswerten[p[h] /. Kurve[Rechts, 1],

$$\{h, \frac{1}{1000}, 5\}, \text{ZeichnenStil} \rightarrow \text{SpektralFarbe}[0];$$

$$\{p''[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} - \frac{2 p'[h]}{h} + \frac{p'[h]^2}{p[h]}\}$$



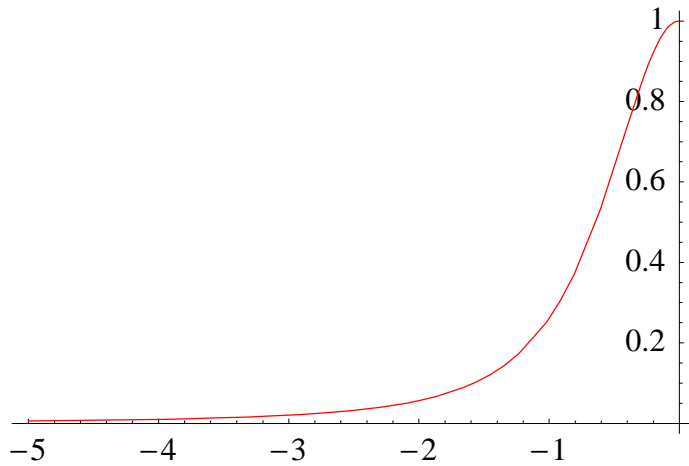
AuflösenNach[DruckGleichung[p, 1], p''[h]] /. {Regel → Gleichung} // Einebnen // Vereinfachen
Kurve[Links, 1] = DifferenzialGleichungNumerischLösen[{"%[1]} /. {M → 1, γ → 1, R → 1, T → 1},

$$p[-\frac{1}{1000}] == 1, p'[-\frac{1}{1000}] == 0, p[h], \{h, -\frac{1}{1000}, -5\};$$

Schaubild[Links, 1] = Zeichnen @@ {Auswerten[p[h]] /. Kurve[Links, 1]},

$$\{h, -\frac{1}{1000}, -5\}, \text{ZeichnenStil} \rightarrow \text{SpektralFarbe}[0];$$

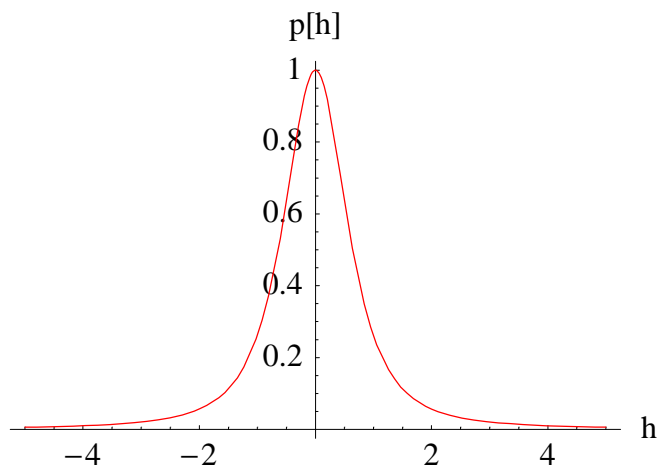
$$\{p''[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} - \frac{2 p'[h]}{h} + \frac{p'[h]^2}{p[h]}\}$$



Die Überlagerung beider Kurven ist sehr überzeugend:

Schaubild[1] =

Zeigen[Schaubild[Links, 1], Schaubild[Rechts, 1], AchsenBeschriftung → {"h", "p[h]}];



Für eine andere Parameter-Wahl ergibt sich ein ähnliches Schaubild:

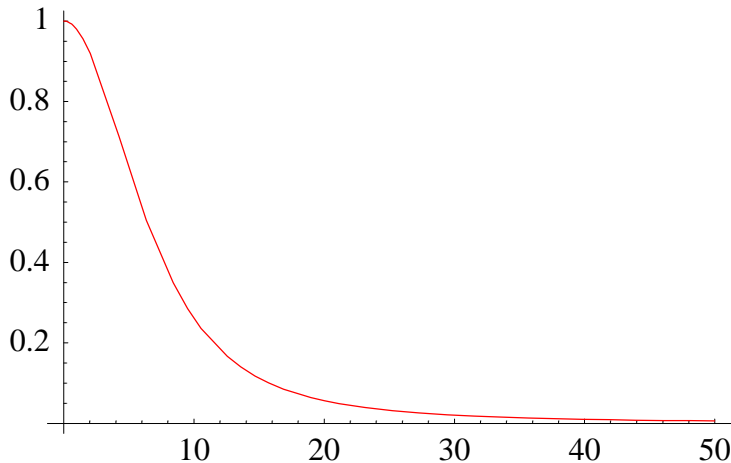
AuflösenNach[DruckGleichung[p, 1], p'[h]] /. {Regel → Gleichung} // Einebnen // Vereinfachen
Kurve[Rechts, 2] = DifferenzialGleichungNumerischLösen[

$$\{\%[1] /. \{M \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 1, R \rightarrow 1, T \rightarrow 10\}, p\left[\frac{1}{1000}\right] == 1, p'\left[\frac{1}{1000}\right] == 0\}, p[h], \left\{h, \frac{1}{1000}, 50\right\};$$

Schaubild[Rechts, 2] = Zeichnen @@ {Auswerten[p[h]] /. Kurve[Rechts, 2],

$$\left\{h, \frac{1}{1000}, 50\right\}, \text{ZeichnenStil} \rightarrow \text{SpektralFarbe}[0];$$

$$\{p''[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} - \frac{2 p'[h]}{h} + \frac{p'[h]^2}{p[h]}\}$$



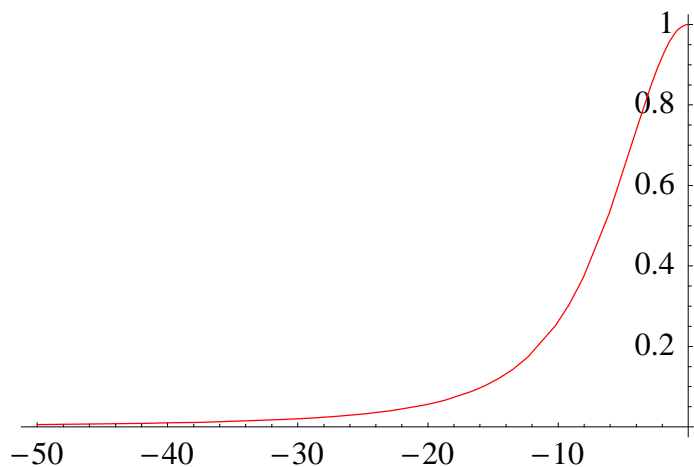
AuflösenNach[DruckGleichung[p, 1], p'[h]] /. {Regel → Gleichung} // Einebnen // Vereinfachen
Kurve[Links, 2] = DifferenzialGleichungNumerischLösen[

$$p\left[-\frac{1}{1000}\right] == 1, p'\left[-\frac{1}{1000}\right] == 0\}, p[h], \left\{h, -\frac{1}{1000}, -50\right\};$$

Schaubild[Links, 2] = Zeichnen @@ {Auswerten[p[h]] /. Kurve[Links, 2],

$$\left\{h, -\frac{1}{1000}, -50\right\}, \text{ZeichnenStil} \rightarrow \text{SpektralFarbe}[0];$$

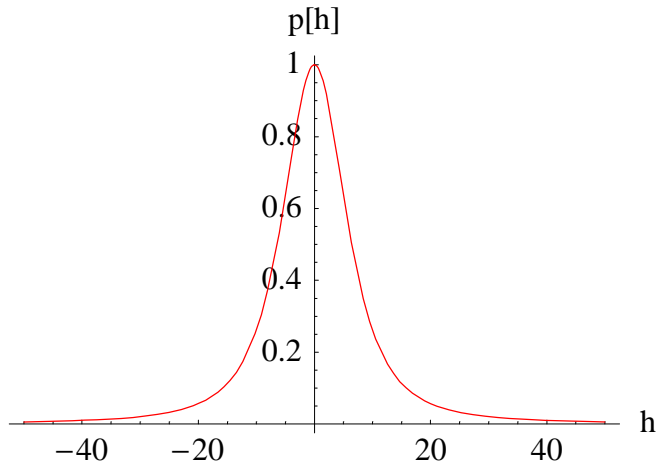
$$\{p''[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} - \frac{2 p'[h]}{h} + \frac{p'[h]^2}{p[h]}\}$$



Die Überlagerung dieser beider Kurven ist auch sehr überzeugend und durchaus ähnlich:

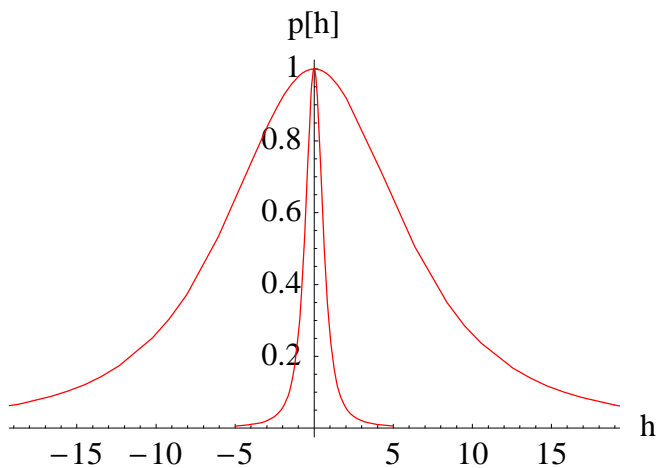
Schaubild[2] =

Zeigen[Schaubild[Links, 2], Schaubild[Rechts, 2], AchsenBeschriftung → {"h", "p[h]"}];



Die Ähnlichkeit der Schaubilder ist belegbar:

Zeigen[Schaubild[1], Schaubild[2]];



Damit ist die grundlegende Form der Druck-Verteilung eines Sterne beschrieben, wenn dieser aus nur einem einzigen Gas bei nur einer einzigen Temperatur besteht.

An der Grenze zum Vakuum findet bezüglich der Temperaturleitung eine Totalreflexion statt, so dass auch kleine Gasmengen bei niedriger Temperatur durchaus stabil als "Gastropfen" im Weltall bestehen können. Ein kritischer Wert, ab dem ein Stern bestehen kann, wurde nicht gefunden.

Eine Gaswolke im Weltraum verliert ihre Temperatur nur aufgrund von Abstrahlung.

Die Asymptoten $p[\pm\infty] \rightarrow 0$ bestätigen, dass ein Gas den gesamten zur Verfügung stehenden Raum prinzipiell ausfüllt.

■ 1.3.3.7. Irrige Vereinfachung

Folgende analytische Vereinfachung der Gleichung wird versucht:

$$\frac{\#}{h p[h]} \& /@ \text{DruckGleichung}[p, 1] // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\text{DruckGleichung}[p, 2] = \% /. \{p \rightarrow \text{Funktion} @@ \{h, e^{f[h]}\}\} // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\frac{2 p'[h]}{h p[h]} - \frac{p'[h]^2}{p[h]^2} + \frac{p''[h]}{p[h]} == -\frac{4 M^2 \pi \gamma p[h]}{R^2 T^2}$$

$$\frac{2 f'[h]}{h} + f''[h] == -\frac{4 E^{f[h]} M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2}$$

Dies ist eine nichtlineare Differential-Gleichung 2. Ordnung in $f[h]$, die nicht so einfach analytisch gelöst werden kann.

Dieser Gleichungs-Typ weist allerdings auf eine Lösung hin, die $f[h] \rightarrow \text{Logarithmus}[p[h]]$ heißen könnte, z.B.:

$$\text{DruckGleichung}[p, 2] /. \{f \rightarrow \text{Funktion}[\{h, \text{Logarithmus}[\frac{C[1]}{h^2 + C[2]}]\}]\} // \text{AllesAusmultiplizieren} //$$

$$\text{Vereinfachen}$$

$$-\frac{2(h^2 + 3 C[2])}{(h^2 + C[2])^2} == -\frac{4 M^2 \pi \gamma C[1]}{R^2 T^2 (h^2 + C[2])}$$

■ 1.3.3.8. Differential-Gleichung der Kehrwert-Funktion

Die Differential-Gleichung der Kehrwert-Funktion scheint einfacher zu sein:

$$\text{DruckGleichung}[p, 1] /. \{p \rightarrow \text{Funktion}[\{h, \frac{1}{g[h]}\}]\} // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\text{DruckGleichung}[p, 3] = \frac{\# g[h]^2}{h} \& /@ \% // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$-\frac{2 g'[h]}{g[h]^2} + \frac{h g'[h]^2}{g[h]^3} - \frac{h g''[h]}{g[h]^2} == -\frac{4 h M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2 g[h]^2}$$

$$-\frac{2 g'[h]}{h} + \frac{g'[h]^2}{g[h]} - g''[h] == -\frac{4 M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2}$$

Hier wird ein Ansatz mit einem Polynom motiviert:

$$\text{DruckGleichung}[p, 3] /. \{g \rightarrow \text{Funktion}[\{h, a h^2\}]\}$$

$$\text{AuflösenNach}[\%, a] // \text{Einebnen}$$

$$\text{DruckLösung}[p, 3, 1] = \{g \rightarrow \text{Funktion} @@ \{h, a h^2 /. \%\}\}$$

$$\text{DruckGleichung}[p, 3] /. \% // \text{Deutsch}$$

$$-2 a == -\frac{4 M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2}$$

$$\{a \rightarrow \frac{2 M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2}\}$$

$$\{g \rightarrow \text{Funktion}[\{h, \frac{2 h^2 M^2 \pi \gamma}{R^2 T^2}\}]\}$$

Richtig

Diese Funktion besitzt eine waagerechte Tangente $g'[0] \rightarrow 0$.

Daraus folgt folgende Funktion für den Druck:

$$\text{DruckLösung}[p, 1, 1] = \{p \rightarrow \text{Funktion} @@ \{h, \frac{1}{g[h]} /. \text{DruckLösung}[p, 3, 1]\}\}$$

DruckGleichung[p, 1] /. % // Deutsch

$$\{p \rightarrow \text{Funktion}[h, \frac{R^2 T^2}{2 h^2 M^2 \pi \gamma}]\}$$

Richtig

Es existiert also ein *hydrostatisch stabiler Zustand* mit $p[0] \rightarrow \infty$ und $p'[0] \rightarrow \infty$. In unmittelbarer Umgebung dieser Doppel-Singularität ist alles regulär.

■ 1.3.3.9. Deutungs-Probleme

Für die Vertreter des *Urknalls* ist nun problematisch, dass ein *hydrostatisch stabiler Zustand* errechnet wurde.

Für ein beliebig kompressibles Gas ergibt sich nun, dass dasselbe im Sinne des idealen Gas-Gesetzes im Zentrum auf einen unendlich hohen Druck komprimiert wird. Freilich stellt dieses Ergebnis die Grenzen der idealen Gas-Gesetzes in Frage und deutet an, dass mindestens die Van-der-Waals-Gleichung benötigt wird, um genau zu sein.

Es ergibt sich allerdings folgender Verlauf der Fallbeschleunigung $g[h]$:

$$g[h] == -\frac{\gamma 4 \pi}{h^2} \int_0^h \rho[h] h^2 dh /. \{\rho[h] \rightarrow \frac{M p[h]}{R T}\}$$

% /. DruckLösung[p, 1, 1]

$$g[h] == -\frac{4 M \pi \gamma \int_0^h h^2 p[h] dh}{h^2 R T}$$

$$g[h] == -\frac{2 R T}{h M}$$

Dieser Verlauf besagt, dass ein *schwarzes Loch* vor allem nach dem idealen Gas-Gesetz existiert und *gar nichts in sich hinein saugt*, was zu nahe kommt, weil ein *hydrostatisch stabiler Zustand* errechnet wurde.

Die Masse eines derartigen *schwarzen Lochs* ergibt:

$$m[h] == 4 \pi \int_0^h \rho[h] h^2 dh /. \{\rho[h] \rightarrow \frac{M p[h]}{R T}\}$$

% /. DruckLösung[p, 1, 1]

$$m[h] == \frac{4 M \pi \int_0^h h^2 p[h] dh}{R T}$$

$$m[h] == \frac{2 h R T}{M \gamma}$$

Dies bedeutet, dass für $h \rightarrow 0$ auch die zugehörige Masse $m[h]$ verschwindet, denn Nichts wiegt auch nichts.

Das Problem ist hier in der Tat eine unzulässige Verwendung des idealen Gas-Gesetzes: Jedes Gas besteht aus als inkompressibel angesetzten Teilchen, deren Gesamt-Volumen durch Kompression nicht unterschritten werden kann.

Somit kann die Theorie vom *Urknall* und den *schwarzen Löchern* nicht durch die hier vorgeführte Rechnung belegt werden.

■ 1.3.3.10. Van-der-Waals-Gesetz

Das Van-der-Waals-Gesetz lautet ([dtv1969], Band 10, Stichwort *Zustandsgleichungen d) van-der-Waalsche Z.*, Seite 198-199):

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) == n R T /. \{n \rightarrow \frac{m}{M}\} /. \{m \rightarrow \rho V\}$$

AuflösenNach[%, ρ] // **Einebnen**

% // **EinheitenKontrolle** // **Deutsch**

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(-b + V) == \frac{R T V \rho}{M}$$

$$\{\rho \rightarrow \frac{M(-b + V)(a + p V^2)}{R T V^3}\}$$

{Richtig}

Hier lässt sich das Volumen einer Kugel streng geometrisch mit

$$\mathbf{KugelVolumen}[h] = \{V \rightarrow 4 \pi \int_0^h h^2 dh\}$$

$$\{V \rightarrow \frac{4 h^3 \pi}{3}\}$$

angeben. Somit ist $\rho[h]$ auch nach dem Van-der-Waal-Gesetz als Funktion von h und $p[h]$ angebar:

$$\mathbf{VanDerWaalsDichte}[h] = \{\rho[h] \rightarrow \frac{M(-b + V)(a + p[h] V^2)}{R T V^3}\} /. \mathbf{KugelVolumen}[h]$$

% // **EinheitenKontrolle** // **Deutsch**

$$\{\rho[h] \rightarrow \frac{27 M(-b + \frac{4h^3\pi}{3})(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])}{64 h^9 \pi^3 R T}\}$$

{Richtig}

Daraus folgt im nächsten Schritt die Fallbeschleunigung $g[h]$ und die zugehörige Integro-Differenzial-Gleichung von $p[h]$:

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{\gamma 4 \pi}{h^2} \int_0^h \rho[h] h^2 dh\}$$

% /. VanDerWaalsDichte[h]

DruckGleichung[p, 4] = p'[h] == g[h] ρ[h] /. % /. VanDerWaalsDichte[h]

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{4 \pi \gamma \int_0^h h^2 \rho[h] dh}{h^2}\}$$

$$\{g[h] \rightarrow -\frac{27 M \gamma \int_0^h \frac{(-b + \frac{4h^3 \pi}{3})(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])}{h^7} dh}{16 h^2 \pi^2 R T}\}$$

$$p'[h] == -\frac{729 M^2 (-b + \frac{4h^3 \pi}{3}) \gamma \left(\int_0^h \frac{(-b + \frac{4h^3 \pi}{3})(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])}{h^7} dh \right) (a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])}{1024 h^{11} \pi^5 R^2 T^2}$$

Nach Isolierung des Integrals kann differenziert werden:

$$\frac{\# h^{11}}{(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h]) (-b + \frac{4h^3 \pi}{3})} \& /@ \text{DruckGleichung}[p, 4]$$

$\partial_h \# \& /@ \% // \text{Vereinfachen}$

DruckGleichung[p, 5] =

$$\frac{\#}{27 h^{10}} ((3b - 4h^3 \pi)^2 (9a + 16h^6 \pi^2 p[h])^2) \& /@ \% // \text{AllesAusmultiplizieren}$$

$$\frac{h^{11} p'[h]}{(-b + \frac{4h^3 \pi}{3})(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])} == -\frac{729 M^2 \gamma \int_0^h \frac{(-b + \frac{4h^3 \pi}{3})(a + \frac{16}{9} h^6 \pi^2 p[h])}{h^7} dh}{1024 \pi^5 R^2 T^2}$$

$$(27 h^{10} ((-297 a b + 288 a h^3 \pi + 16 h^6 \pi^2 (-15 b + 8 h^3 \pi) p[h]) p'[h] + 16 h^7 \pi^2 (3 b - 4 h^3 \pi) p'[h]^2 + h(-3 b + 4 h^3 \pi) (9 a + 16 h^6 \pi^2 p[h]) p''[h])) / ((3 b - 4 h^3 \pi)^2 (9 a + 16 h^6 \pi^2 p[h])^2) == \frac{27 M^2 (3 b - 4 h^3 \pi) \gamma (9 a + 16 h^6 \pi^2 p[h])}{1024 h^7 \pi^5 R^2 T^2}$$

$$\begin{aligned} & -297 a b p'[h] + 288 a h^3 \pi p'[h] - 240 b h^6 \pi^2 p[h] p'[h] + 128 h^9 \pi^3 p[h] p'[h] + 48 b h^7 \pi^2 p'[h]^2 - \\ & 64 h^{10} \pi^3 p'[h]^2 - 27 a b h p''[h] + 36 a h^4 \pi p''[h] - 48 b h^7 \pi^2 p[h] p''[h] + 64 h^{10} \pi^3 p[h] p''[h] == \\ & \frac{19683 a^3 b^3 M^2 \gamma}{1024 h^{17} \pi^5 R^2 T^2} - \frac{19683 a^3 b^2 M^2 \gamma}{256 h^{14} \pi^4 R^2 T^2} + \frac{6561 a^3 b M^2 \gamma}{64 h^{11} \pi^3 R^2 T^2} - \frac{729 a^3 M^2 \gamma}{16 h^8 \pi^2 R^2 T^2} - \frac{243 a^2 M^2 \gamma p[h]}{h^2 R^2 T^2} + \\ & \frac{6561 a^2 b^3 M^2 \gamma p[h]}{64 h^{11} \pi^3 R^2 T^2} - \frac{6561 a^2 b^2 M^2 \gamma p[h]}{16 h^8 \pi^2 R^2 T^2} + \frac{2187 a^2 b M^2 \gamma p[h]}{4 h^5 \pi R^2 T^2} - \frac{729 a b^2 M^2 \gamma p[h]^2}{h^2 R^2 T^2} + \\ & \frac{729 a b^3 M^2 \gamma p[h]^2}{4 h^5 \pi R^2 T^2} + \frac{972 a b h M^2 \pi \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} - \frac{432 a h^4 M^2 \pi^2 \gamma p[h]^2}{R^2 T^2} + \frac{108 b^3 h M^2 \pi \gamma p[h]^3}{R^2 T^2} - \\ & \frac{432 b^2 h^4 M^2 \pi^2 \gamma p[h]^3}{R^2 T^2} + \frac{576 b h^7 M^2 \pi^3 \gamma p[h]^3}{R^2 T^2} - \frac{256 h^{10} M^2 \pi^4 \gamma p[h]^3}{R^2 T^2} \end{aligned}$$

Dies ist die eigentliche Gleichung, deren Lösung die tatsächliche Druck-Verteilung in einem Stern besser abschätzt als die Theorie vom *Urknall* oder den *schwarzen Löchern*.

Für $a \rightarrow 0$ vereinfacht sich die Differenzial-Gleichung:

DruckGleichung[p , 6] = $\frac{\#}{\pi^2 16 h^6}$ & /@ **DruckGleichung**[p , 5] /. { $a \rightarrow 0$ } // Vereinfachen

$$h(3b - 4h^3\pi) p'[h]^2 + p[h]((-15b + 8h^3\pi) p'[h] + h(-3b + 4h^3\pi) p''[h]) == \frac{M^2(3b - 4h^3\pi)^3 \gamma p[h]^3}{4h^5 \pi R^2 T^2}$$

Diese Gleichung beschreibt ein Gas deutlich oberhalb des kritischen Punktes, also bei genügend hoher Temperatur.

Auch diese Gleichung ist wenig genießbar und lässt für genügend Forscher-Generationen noch Neuland zurück.

■ 1.3.4. Diskussion

Die vorgenommene Berechnung zeigt, dass Gasvolumina beliebiger Größe allesamt im Weltraum stabil existieren können und trotzdem ständig in einen leeren Weltraum etwas an Gas verlieren.

Die hier vorgenommenen Betrachtungen gelten für eine konstante Temperatur T , wobei eine Auskühlung in den Weltraum hauptsächlich durch Abstrahlung geschieht, da an der Grenzschicht zum Vakuum eine Total-Reflexion der Temperatur-Leitung stattfindet.

Weder die Vorstellung eines *Urknalls*, noch die Vorstellung von *schwarzen Löchern*, die alles in sich aufsaugen, ist mit der hier sogar für das ideale Gas-Gesetz gefundenen Lösung einer stabilen Druckverteilung im Stern bzw. in einer Gaswolke vereinbar.

Es lohnt sich, zu einem singulären Ergebnis die Probe zu rechnen und den vollen Deutungs-Spielraum zu nutzen.

■ 1.4. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

```
{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID} // Deutsch
% // AngehaltenLösen

{$MathematicaFassung, $Auslieferungsnummer, $Lizenznummer}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, L4526-3546}
```

Die Berechnungszeit betrug:

```
ZeitVerbrauch[ ] "s"
52.14 s
```

Literatur

[BeS1945]

Bergmann L., Schaefer C. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 1 **Mechnik, Akustik, Wärme**, Walter de Gruyter, Berlin, 2. und 3. Auflage, (1945)

[dtv1969]

dtv-Lexikon der Physik, 10 Bände, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, (1969)

[Krau2007]

Krause M., *Die rätselhafte Dunkle Materie auf dem Prüfstand*, Selbstverlag, Kirchzarten, ISBN 978-3-00-021763-0, (2007)